

Analisis Kestabilan Model Eko-Epidemiologi dengan Pemanenan Konstan pada Predator

Nurhalis Hasan^{1*}, Resmawan^{2*}, Emli Rahmi^{3*}

Abstract

The main purpose of this research is to study the stability analysis of the eco-epidemiology model with constant harvesting to predator. The population of this model divided into three sub population those are susceptible prey x_s , infected prey x_i , and predator y . The eco-epidemiology model is constructed by given harvesting to predator. Two equilibrium points were obtained, the equilibrium point of infected prey extinction, and the interior equilibrium points where the three sub population exist. The existence of each equilibrium points depend on y^* . The Jacobi matrix is determined before the stability of the model is studied. Each stability of the equilibrium points described on its stability condition of each equilibrium points. Numerical simulation is done to distinct the stability of the equilibrium points. The numerical simulation is done by using 4th-order Runge-Kutta method and Python 3.7.

Keywords: *Model Eco-Epidemiological, equilibrium point, Jacobi Matrix, Stability, Numerical Simulation*

Abstrak

Penelitian ini dilakukan untuk menganalisis kestabilan model eko-epidemiologi dengan pemanenan konstan terhadap predator. Populasi dalam model terbagi atas tiga populasi yaitu populasi prey rentan x_s , populasi prey terinfeksi x_i , dan populasi predator y . Dikonstruksi model eko-epidemiologi dengan pemanenan konstan terhadap predator. Diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan kepunahan populasi prey terinfeksi, dan titik kesetimbangan interior atau semua populasi ada. Eksistensi dari masing-masing titik kesetimbangan bergantung pada y^* atau akar-akar *realnya* masing-masing. Sebelum mencari kestabilan dari titik-titik kesetimbangan, ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobi. Kestabilan dari masing-masing titik diuraikan pada syarat kestabilannya masing-masing. Simulasi numerik dari titik kesetimbangan dilakukan agar terlihat lebih jelas kestabilan dari masing-masing titik kesetimbangan. Simulasi numerik dilakukan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dan dibantu software Python 3.7.

Kata kunci: Model Eko-Epidemiologi, Titik Kesetimbangan, Matriks Jacobi, Kestabilan, Simulasi Numerik.

1. Pendahuluan

Pada pemodelan matematika predasi (predatorisme) yang merupakan hubungan antara pemangsa (*predator*) dengan mangsa (*prey*), diubah ke dalam bentuk suatu sistem persamaan yang disebut sistem *predator-prey* untuk dipelajari dinamika populasinya. Pada tahun 1798, Thomas Malthus mengusulkan teori populasi dinamis dengan mengasumsikan populasi bertumbuh secara eksponensial atau bisa dikatakan tumbuh tanpa batas. Setelahnya, tahun 1838 Verhulst mengembangkan teori dari Malthus dengan mengasumsikan bahwa suatu populasi akan tumbuh secara logistik atau bisa dikatakan suatu populasi tidak akan tumbuh melewati batas pertumbuhan populasi yang ditentukan. Pada tahun 1925-1928 terjadi

*Program Studi Matematika, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo

Email: nurhalishasan21@gmail.com, resmawan@ung.ac.id, emlirahmi@ung.ac.id

kemajuan besar dalam teori yang mempelajari pertumbuhan populasi yang dilakukan oleh Lotka 1925 dan Voltera 1928 dengan memperoleh persamaan logistik, yang mana disebut "*hukum pertumbuhan populasi*", serta mengusulkan pertamakali model populasi dua spesies yaitu model *predator-prey* dengan asumsi pertumbuhan *prey* mengikuti model Malthus. Tahun 1934, Gause mengembangkan model Lotka-Voltera dengan menerapkan asumsi pertumbuhan logistik pada *prey* [1].

Dalam pengembangan model *predator-prey* Holling pada tahun 1959 melakukan pendekatan analitik terhadap model *predator-prey* dengan menambahkan komponen dasar fungsi respon. Holling memperkenalkan tiga fungsi respon, yaitu respon tipe *I*, respon tipe *II*, dan respon tipe *III* [2]. Selain itu, topik lain yang muncul dalam ekologi adalah pemanenan yang dapat berfungsi untuk mengontrol suatu populasi, yang mana pemanenan yang sering dipelajari dalam pemodelan matematika adalah pemanenan konstan, pemanenan proposional, dan pemanenan nonlinear. Dalam bidang ekologi, penyebaran penyakit dapat terjadi dalam interaksi antar komponen-komponen penyusunnya. Untuk mempelajari penyebaran penyakit yang menular pada setiap spesies yang saling berinteraksi, diintegrasikan bidang ilmu ekologi dan epidemiologi sehingga membentuk bidang ilmu eko-epidemiologi. Faktor penyakit pada sistem *predator-prey* diperkenalkan pertamakali oleh Anderson dan Mei [3] yang meneliti faktor suatu gangguan yang terjadi pada sistem persamaan interaksi *predator-prey* dan menemukan studi kasus faktor pengendalian penyakit pada sistem persamaan *predator-prey*.

Fenomena alam yang memperlihatkan interaksi antara *predator* dan *prey*, dimana populasi *prey* terserang penyakit dijelaskan oleh Chattopadhyay dan Bairagi [4]. Pada model ini diasumsikan populasi *prey* terinfeksi oleh penyakit dan ditambahkan faktor pemanenan pada populasi *prey*. Selain itu, interaksi antara *predator* dan *prey*, dimana populasi *prey* terserang penyakit dijelaskan oleh Purnomo dkk [5]. Model ini diasumsikan populasi *prey* terinfeksi oleh penyakit, ditambahkan faktor pemanenan proporsional pada populasi *prey* rentan, *predator* dapat menentukan *prey* rentan dan *prey* terinfeksi, *predator* hanya memangsa *prey* terinfeksi mengikuti fungsi respon Holling tipe *II*. Model *predator-prey* dimana pemanenan pada suatu populasi di panen secara konstan dijelaskan oleh Jha PK dan Ghorai S [6]. Model ini diasumsikan populasi *prey* tumbuh secara logistik, pemangsaan mengikuti fungsi respon Holling tipe *II*, terdapat kematian alami pada populasi *predator*, dan dilakukan pemanenan secara konstan terhadap populasi *prey*.

Pada artikel ini dibahas model matematika eko-epidemiologi dengan menggunakan model *predator-prey* Holling tipe *I*, dengan populasi *prey* terinfeksi penyakit. Selain itu diasumsikan adanya pemanenan secara konstan pada populasi *predator*. Hal ini dikarenakan peneliti akan meneliti suatu interaksi antara *predator* dan *prey* yang mana populasi *prey* terinfeksi oleh penyakit, dan populasi *predator* memiliki sifat pasif atau lebih suka menunggu mangsanya (*prey*) serta populasi *predator* merupakan populasi yang dapat dipanen.

2. Model Matematika

Model eko-epidemiologi dengan pemanenan konstan yang dibahas pada artikel ini diintegrasikan dari model *predator-prey* tipe Gause dan model epidemi *SI*. Pada model ini yang terinfeksi oleh penyakit adalah populasi *prey*, sehingga populasi *prey* terbagi menjadi dua kelas yaitu, populasi *prey* rentan yang dinotasikan x_s dan populasi *prey* terinfeksi yang dinotasikan x_I . Fungsi respon yang digunakan pada model ini merupakan fungsi respon Holling tipe *I*, dimana *predator* yang dinotasikan y memiliki sifat pasif atau lebih suka menunggu *prey*. *Predator* merupakan populasi yang dapat dipanen, sehingga pada model ini pemanenan pada *predator* dilakukan dengan ukuran Q_y yang sama. Dari asumsi-asumsi yang ada model eko-epidemiologi dengan pemanenan konstan terhadap *predator* dapat di modelkan yang disajikan pada persamaan (1).

$$\begin{aligned}
x_S &= rx_S \left(1 - \left(\frac{x_S + x_I}{K} \right) \right) - m_1 x_S y - a x_S x_I \\
x_I &= a x_S x_I - m_2 x_I y - c_1 x_I \\
y &= b_1 x_S y + b_2 x_I y - c_2 y - Q_y
\end{aligned} \tag{1}$$

dimana $r, K, m_1, m_2, b_1, b_2, a, c_1, c_2$, dan Q_y masing-masing adalah laju pertumbuhan intrinsik populasi *prey* rentan, daya dukung lingkungan hidup populasi, laju pemangsaan *predator* terhadap mangsanya *prey* rentan, laju pemangsaan *predator* terhadap mangsanya *prey* terinfeksi, jumlah populasi *predator* yang masuk akibat memangsa *prey* rentan, jumlah populasi *predator* yang masuk akibat memangsa *prey* terinfeksi, laju interaksi antara populasi *prey* rentan dan *prey* terinfeksi, kematian alami *prey* terinfeksi, kematian alami *predator*, dan jumlah panen.

Untuk mempermudah proses analisis model, dilakukan penskalaan terlebih dahulu pada model (1). Menurut Edelstein-Keshet [7], penskalaan model akan memangkas beberapa parameter sehingga dapat merubah model secara kuantitatif tetapi tidak secara kualitatif. Dengan melakukan penskalaan $(x_S, x_I, y, t) \rightarrow \left(\frac{x_S}{K}, \frac{x_I}{K}, \frac{m_1}{r} y, rt \right)$ model (1), sehingga sistem tereduksi menjadi:

$$\begin{aligned}
x_S &= x_S(1 - x_S - x_I) - x_S y - \beta x_S x_I \\
x_I &= \beta x_S x_I - \mu x_I y - \alpha x_I \\
y &= \eta_1 x_S y + \eta_2 x_I y - \delta y - q
\end{aligned} \tag{2}$$

dengan $\alpha = \frac{c_1}{r}$, $\beta = \frac{aK}{r}$, $\delta = \frac{c_2}{r}$, $\eta_1 = \frac{b_1 K}{r}$, $\eta_2 = \frac{b_2 K}{r}$, $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, dan $q = \frac{Q_y m_1}{r^2}$.

Parameter yang ada pada model (2) selalu positif. Hal ini didasari oleh kondisi biologis di alam bahwa tidak ada jumlah populasi, pemanenan, ataupun pemangsaan yang negatif. Pada artikel ini, model (2) adalah model yang akan dianalisis kestabilan dari titik kesetimbangan yang diperoleh.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Titik Kesetimbangan

Definisi 3.1 Titik $x_0 \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan atau titik kritis, jika $f(x_0) = 0$. Titik kesetimbangan x_0 disebut titik kesetimbangan hiperbolik, jika tidak terdapat nilai eigen dari matriks Jacobi $f(x)$ yang memiliki bagian nol real [8].

Berdasarkan Definisi 3.1 titik kesetimbangan model (2) diperoleh dari persamaan berikut.

- (1). $x_S = 0$, atau
- (2). $1 - x_S - x_I - y - \beta x_I = 0$.
- (3). $x_I = 0$, atau
- (4). $\beta x_S - \mu y - \alpha = 0$.
- (5). $\eta_1 x_S y + \eta_2 x_I y - \delta y - q = 0$.

yang mana titik kesetimbangan model (2) diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu:

$$E_0 = (1 - y_{E_0}^*, 0, y_{E_0}^*)$$

dengan $y_{E_0}^*$ adalah

$$\begin{aligned}
y_{1,2} &= \frac{-(o) \pm \sqrt{Dy_{E_0}^*}}{2\eta_1} \\
Dy_{E_0}^* &= (o)^2 - 4\eta_1 q
\end{aligned}$$

dan $o = \delta - \eta_1$.

$$E_1 = \left(\frac{\mu y_{E_1}^* + \alpha}{\beta}, \frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{\beta(1 + \beta)}, y_{E_1}^* \right)$$

dimana $y_{E_1}^*$ adalah

$$y_{1,2} = \frac{-(d_3 - d_4) \pm \sqrt{Dy_{E_1}^*}}{2(d_1 - d_2)}$$

$$Dy_{E_1}^* = (d_3 - d_4)^2 + 4(d_1 - d_2)q\beta(1 + \beta)$$

dengan

$$\begin{aligned} d_1 &= \eta_1 \mu (1 + \beta) \\ d_2 &= \eta_2 (\mu + \beta) \\ d_3 &= \eta_1 \alpha (1 + \beta) + \eta_2 \beta \\ d_4 &= \eta_2 \alpha + \delta \beta (1 + \beta) \end{aligned}$$

3.2. Eksistensi Titik Keseimbangan

Lemma 3.1 $\mathbb{R}_+^3 := (x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}$. Misalkan $E_i = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), i = 0, 1$ merupakan solusi dari model (2), maka E_i adalah titik keseimbangan dari model (2) jika $E_i \in \mathbb{R}$.

Bukti.

Melihat kondisi biologis di alam, tidak memungkinkan jumlah populasi suatu spesies bernilai negatif, maka solusi dari model (2) harus bernilai positif.

Dengan mengikuti Lemma 3.1 agar setiap titik keseimbangan yang diperoleh dapat terdefinisi di \mathbb{R}_+^3 , maka eksistensi dari setiap titik keseimbangan yang diperoleh diuraikan dalam beberapa poin berikut:

- Eksistensi titik keseimbangan E_0 diuraikan dalam Teorema 4.1.

Teorema 4.1 $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$ jika

- $q < \frac{(o)^2}{4\eta_1}, \eta_1 > \delta$ dan $0 < y_{E_0}^* < 1$. Kondisi ini menghasilkan dua titik keseimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$. Atau,
- $q = \frac{(o)^2}{4\eta_1}, \eta_1 > \delta$ dan $0 < y_{E_0}^* < 1$. Kondisi ini menghasilkan satu titik keseimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$.

- Eksistensi titik keseimbangan E_1 diuraikan dalam Teorema 4.2.

Teorema 4.2

- E_1 tidak terdapat di \mathbb{R}_+^3 jika $Dy_{E_1}^* < 0$. Kondisi ini tidak menghasilkan titik interior.
- $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$ jika $Dy_{E_1}^* > 0$ dan :

$$i). \max \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*.$$

Atau,

$$ii). \max \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*.$$

Atau,

$$iii). \max \left\{ \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*.$$

Atau,

$$iv). \eta_1 < \min \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*.$$

Atau,

$$v). \max \left\{ \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*.$$

Kondisi ini menghasilkan dua titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$.

(c). $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$ jika $Dy_{E_1}^* = 0$ dan :

$$i). \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)} < \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*. \text{ Atau,}$$

$$ii). \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*.$$

Kondisi ini menghasilkan satu titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$.

3.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Untuk mengetahui kestabilan dari titik-titik kesetimbangan model (2), dilakukan pelinieran terhadap model (2) sehingga diperoleh matriks Jacobi yang disajikan pada matriks (3).

$$J(x_S, x_I, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2x_S - x_I - y - \beta x_I & -\beta x_S - x_S & -x_S \\ \beta x_I & \beta x_S - \mu y - \alpha & -\mu x_I \\ \eta_1 y & \eta_2 y & \eta_1 x_S + \eta_2 x_I - \delta \end{bmatrix} \quad (3)$$

3.3.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan E_0

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan E_0 ke matriks (3), diperoleh matriks $J(E_0)$ yang disajikan pada matriks (4).

$$J(x_S, x_I, y) = \begin{bmatrix} -(1 - y_{E_0}^*) & -\beta(1 - y_{E_0}^*) - (1 - y_{E_0}^*) & -(1 - y_{E_0}^*) \\ \beta x_I & \beta x_S - \mu y - \alpha & -\mu x_I \\ \eta_1 y & \eta_2 y & \eta_1 x_S + \eta_2 x_I - \delta \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nilai eigen dari $J(E_0)$ diperoleh dari $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$, dimana I adalah matriks identitas 3×3 . Dari $J(E_0) - \lambda I = 0$, diperoleh

$$\lambda_1 = \beta(1 - y_{E_0}^*) - (\alpha + \mu y_{E_0}^*)$$

dan

$$\lambda^2 + (g_1 - g_2)\lambda + (g_3 - g_4) = 0$$

dimana

$$g_1 = (1 - y_{E_0}^*) + \mu y_{E_0}^* + \alpha$$

$$g_2 = \beta(1 - y_{E_0}^*)$$

$$g_3 = (1 - y_{E_0}^*)\mu y_{E_0}^* + \alpha(1 - y_{E_0}^*) + (1 - y_{E_0}^*)\eta_1 y_{E_0}^*$$

$$g_4 = \beta(1 - y_{E_0}^*)^2$$

Kestabilan dari E_0 dijelaskan dalam Teorema 4.3

Teorema 4.3 Titik kesetimbangan E_0 stabil atau stabil asimtotik lokal, jika $\beta < \frac{\alpha + \mu y_{E_0}^*}{1 - y_{E_0}^*}$, $k_0 > 0$, $g_1 > g_2$, dan $g_3 > g_4$. Sebaliknya, jika syarat stabil tidak terpenuhi maka titik

kesetimbangan E_0 tidak stabil untuk semua syarat stabil tidak terpenuhi, atau tidak stabil saddle untuk salah satu syarat stabil tidak terpenuhi.

3.3.2. Kestabilan Titik Keseimbangan E_1

Sebelum mencari persamaan linearisasi titik keseimbangan E_1 , terlebih dahulu disederhanakan matriks Jacobi (3) agar memudahkan proses pencarian persamaan linearisasi E_1 . Untuk menyederhanakan matriks Jacobi (3), lihat persamaan yang memperoleh titik keseimbangan E_1 , sehingga matriks Jacobi (3) menjadi matriks Jacobi $J(x_S, x_I, y)^*$ yang disajikan pada matriks (5)

$$J(x_S, x_I, y)^* = \begin{bmatrix} -x_S & -\beta x_S - x_S & -x_S \\ \beta x_I & 0 & -\mu x_I \\ \eta_1 y & \eta_2 y & \frac{q}{y} \end{bmatrix} \quad (5)$$

dengan mensubstitusikan titik keseimbangan E_1 ke matriks $J(x_S, x_I, y)^*$, diperoleh matriks $J(E_1)^*$ yang dapat dituliskan.

$$J(E_1)^* =$$

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{\mu y_{E_1}^* + \alpha}{\beta}\right) & -\beta\left(\frac{\mu y_{E_1}^* + \alpha}{\beta}\right) - \left(\frac{\mu y_{E_1}^* + \alpha}{\beta}\right) & -\left(\frac{\mu y_{E_1}^* + \alpha}{\beta}\right) \\ \beta\left(\frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{\beta(1 + \beta)}\right) & 0 & -\mu\left(\frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{\beta(1 + \beta)}\right) \\ \eta_1 y_{E_1}^* & \eta_2 y_{E_1}^* & \frac{q}{y_{E_1}^*} \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari $J(E_1)^*$ diperoleh dari $\det(J(E_1)^* - \lambda I) = 0$, dimana I adalah matriks identitas 3×3 . Dari $\det(J(E_1)^* - \lambda I) = 0$, diperoleh persamaan karakteristik (6)

$$\lambda^3 + (p_1 - p_2)\lambda^2 + (p_3 - p_4)\lambda + (p_5 - p_6) = 0 \quad (6)$$

dengan,

$$p_1 = \frac{\mu y_{E_1}^* + \alpha}{\beta}$$

$$p_2 = \frac{q}{y_{E_1}^*}$$

$$p_3 = \frac{(\mu y_{E_1}^* + \alpha)(\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*))}{\beta + 1} + \frac{(\mu y_{E_1}^* + \alpha)\eta_1 y_{E_1}^*}{\beta} \\ + \frac{(\mu y_{E_1}^* + \alpha)(\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*))}{\beta(1 + \beta)} + \frac{\eta_2 \mu y_{E_1}^* (\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*))}{\beta(1 + \beta)}$$

$$p_4 = \frac{\mu q}{\beta} + \frac{\alpha q}{\beta y_{E_1}^*}$$

$$p_5 = \frac{\eta_2 y_{E_1}^* (\mu y_{E_1}^* + \alpha)(\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*))}{\beta(\beta + 1)} + \frac{\eta_2 \mu y_{E_1}^* (\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*))}{\beta^2(\beta + 1)}$$

$$p_6 = \frac{q(\mu y_{E_1}^* + \alpha)(\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*))}{(\beta + 1)y_{E_1}^*} + \left(\frac{\mu(\mu y_{E_1}^* + \alpha)(\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*))}{\beta(\beta + 1)} \right)$$

$$+ \frac{\mu(\mu y_{E_1}^* + \alpha)(\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*))}{\beta^2(\beta + 1)} \eta_1 y_{E_1}^* + \frac{q(\mu y_{E_1}^* + \alpha)(\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*))}{\beta y_{E_1}^*(\beta + 1)}$$

Kestabilan titik kesetimbangan E_1 dijelaskan dalam Teorema 4.4

Teorema 4.4 *Titik kesetimbangan E_1 stabil atau stabil asimptotik lokal, jika $k_0 > 0, p_1 > p_2, p_3 > p_4, p_5 > p_6$, dan $s_1 > s_2$, dimana*

$$s_1 = p_1 p_3 + p_2 p_4 + p_6$$

$$s_2 = p_5 + p_1 p_4 + p_2 p_3$$

Sebaliknya, jika syarat stabil tidak terpenuhi maka titik kesetimbangan E_1 tidak stabil untuk semua syarat stabil tidak terpenuhi, atau tidak stabil saddle untuk salah satu syarat stabil tidak terpenuhi.

3.4. Simulasi Numerik

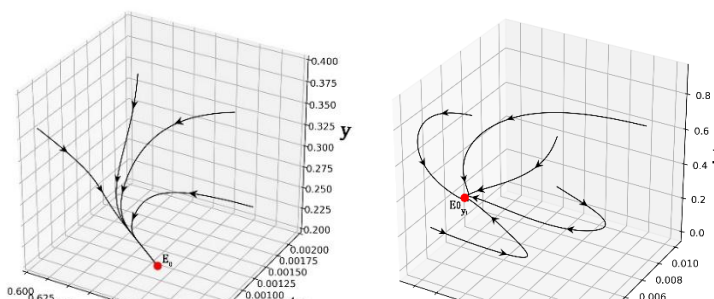
Simulasi numerik model (2) dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan bantuan software Python 3.7. Simulasi dilakukan dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1.

Tabel 1: Nilai-nilai parameter

Parameter	Nilai			
	E_0		E_1	
	$q = \frac{(o)^2}{4\eta_1}$	$q < \frac{(o)^2}{4\eta_1}$	$Dy_{E_1}^* = 0$	$Dy_{E_1}^* > 0$
α	0.1	0.1	0.388	0.02
β	0.02	0.02	0.5	0.05
δ	0.2	0.2	0.02	0.003
η_1	0.4	0.4	0.000011	0.008
η_2	0.1	0.1	0.3701	0.030
μ	0.2	0.2	0.387995428	0.032
q	0.025	0.001	0.00071	0.001

3.4.1. Simulasi Numerik Titik Kesetimbangan E_0

Simulasi numerik titik kesetimbangan E_0 disimulasikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan memberikan nilai-nilai pada parameter dan nilai awal. Nilai-nilai yang diberikan pada parameter harus memenuhi Teorema 4.1 agar titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$ dan perlu diingat, bahwa setiap nilai awal yang diberikan bukanlah menggambarkan jumlah populasi melainkan proporsional dari setiap populasi. Simulasi numerik titik kesetimbangan E_0 diperlihatkan pada gambar (a) dan (b).



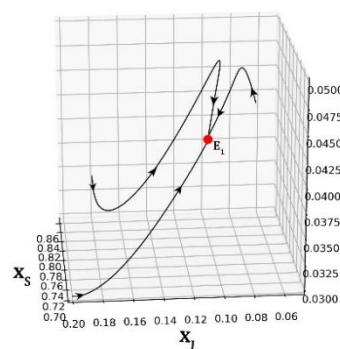
(a) Simulasi Titik
Keseimbangan E_0 untuk
 $q = \frac{(o)^2}{4\eta_1}$

(b) Simulasi Titik
Keseimbangan E_0 untuk
 $q < \frac{(o)^2}{4\eta_1}$

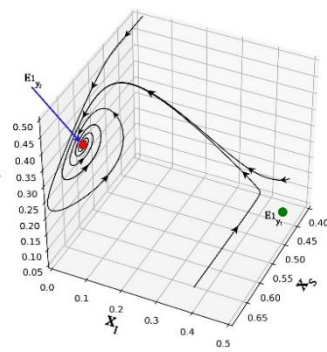
Pada gambar (a) diperlihatkan bahwa titik keseimbangan E_0 hanya memiliki satu titik keseimbangan dan titik keseimbangan E_0 stabil atau stabil asimptotik lokal. Sedangkan, pada gambar (b) diperlihatkan bahwa titik keseimbangan E_0 memiliki dua titik keseimbangan yang mana titik keseimbangan E_{0y_2} tidak stabil *saddle* dan titik keseimbangan E_{0y_1} stabil atau stabil asimptotik lokal.

3.4.2. Simulasi Numerik Titik Keseimbangan E_1

Simulasi numerik titik keseimbangan E_1 disimulasikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan memberikan nilai-nilai pada parameter dan nilai awal. Nilai-nilai yang diberikan pada parameter harus memenuhi Teorema 4.2. agar titik keseimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, dan perlu diingat, bahwa setiap nilai awal yang diberikan bukanlah menggambarkan jumlah populasi melainkan proporsional dari setiap populasi. Simulasi numerik titik keseimbangan E_1 diperlihatkan pada gambar (c) dan (d).



(a) Simulasi Titik
Keseimbangan E_1 untuk
 $Dy_{E_1}^* = 0$



(b) Simulasi Titik
Keseimbangan E_1 untuk
 $Dy_{E_1}^* > 0$

Pada gambar (c) diperlihatkan bahwa titik keseimbangan E_1 hanya memiliki satu titik keseimbangan dan titik keseimbangan E_1 stabil atau stabil asimptotik lokal. Sedangkan, pada gambar (d) diperlihatkan bahwa titik keseimbangan E_1 memiliki dua titik keseimbangan yang mana titik keseimbangan E_{1y_1} tidak stabil *saddle* dan titik keseimbangan E_{1y_2} stabil atau stabil asimptotik lokal.

4. Kesimpulan

Kestabilan dari titik kesetimbangan E_0 dan E_1 diuraikan pada Teorema 4.3 dan Teorema 4.4. Parameter *Harvesting* (Q_y) pada *predator* berpengaruh terhadap eksistensi dari titik kesetimbangan E_0 . Untuk pemanenan *predator* (Q_y) sebesar $\frac{qr^2}{m_1}$ dimana $q = \frac{(o)^2}{4\eta_1}$ diperoleh ada satu titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$. Sedangkan, untuk pemanenan *predator* (Q_y) sebesar $\frac{qr^2}{m_1}$ dimana $q < \frac{(o)^2}{4\eta_1}$, diperoleh dua titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$. Dari kestabilan titik E_0 diperoleh bahwa, jika populasi *prey* terinfeksi punah, keadaan populasi *prey* rentan dan populasi *predator* tidak akan punah, karena kedua populasi tersebut akan saling bergantung satu sama lain agar tidak ada populasi yang punah dan tidak ada populasi yang jumlahnya akan tumbuh berlebihan. Selain itu, dari kestabilan titik E_1 diperoleh bahwa populasi *prey* rentan, *prey* terinfeksi, dan *predator* saling bergantung satu sama lain, sehingga menyebabkan tidak ada populasi yang punah.

Daftar Pustaka

- [1] Berryman A. A., 1992. The Orgins and Evolution of Predator-Prey Theory, *ESA Ecology Society of Amerika*.
- [2] Holling C. S., 1959. Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism. *The Canadian Entomologist*, *The Canadian Entomologist*, Vol. XCI, No.7.
- [3] Anderson R. M., & May R. M., 1986. The Invasion, Persistence and Spread of Infectious Diseases within Animal and Plant Communities: Discussion, *Philosophical Transactions of The Royal Society B Biological Sciences*, Vol.314, No.1.
- [4] Chattopadhyay J., & Bairagi N., 2001. Pelicans at Risk in Salton Sea, *Ecological Modelling-ECOL MODEL*, Vol. 136.
- [5] Purnomo, A. S. Darti I., & Suryanto A., 2017. "Dynamics od Eco-Epidemiological Model with Harvesting". *AIP Conference Proceedings*.
- [6] Jha P.K., dan Ghorai S., 2017. "Stability of Prey-Predator Model with Holling Type Response Function and Selective Harvesting", *Journal of Applied & Computational Mathematics*, Vol. 06.
- [7] Edelstein-Keshet L., 2005. "Mathematical Models in Biology", *SIAM, Canada*.
- [8] Perko L., 2001. "Differential Equations and Dynamical System ", *Springer*, New York.

Lampiran

Teorema 4.1 Titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$ jika

- a) $q < \frac{(o)^2}{4\eta_1}$, $\eta_1 > \delta$ dan $0 < y_{E_0}^* < 1$. Kondisi ini menghasilkan dua titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$, atau
- b) $q = \frac{(o)^2}{4\eta_1}$, $\eta_1 > \delta$ dan $0 < y_{E_0}^* < 1$. Kondisi ini menghasilkan satu titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$.

Bukti

Eksistensi titik kesetimbangan E_0 bergantung pada nilai $y_{E_0}^*$. Nilai $y_{E_0}^*$ diperoleh dari persamaan kuadrat yang disajikan pada persamaan (7)

$$\eta_1 y^2 + (o)y + q = 0 \quad (7)$$

dengan $o = \delta - \eta_1 \cdot y_{E_0}^*$ dapat dituliskan kembali dengan

$$y_{1,2} = \frac{-(o) \pm \sqrt{Dy_{E_0}^*}}{2\eta_1}$$

$$Dy_{E_0}^* = (o)^2 - 4\eta_1 q.$$

dengan $o = \delta - \eta_1$.

a) Kasus a

Akan ditunjukkan $q < \frac{(o)^2}{4\eta_1}$, $\eta_1 > \delta$ dan $0 < y_{E_0}^* < 1$ sehingga menghasilkan dua titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$. Untuk $q < \frac{(o)^2}{4\eta_1}$

$$q < \frac{(o)^2}{4\eta_1}$$

$$4\eta_1 q < (o)^2$$

$$(o)^2 - 4\eta_1 q > 0$$

$$\Rightarrow Dy_{E_0}^* > 0$$

Karena $Dy_{E_0}^* > 0$, kondisi ini menyebabkan $y_1 = y_{E_0}^* \neq y_2 = y_{E_0}^*$. Untuk $\eta_1 > \delta$

$$\eta_1 > \delta$$

$$\delta - \eta_1 < 0$$

$$-(\delta - \eta_1) > 0$$

$$\Rightarrow -(o) > 0$$

Karena $q < \frac{(o)^2}{4\eta_1}$ dan $\eta_1 > \delta$, kondisi ini membuktikan $y_{E_0}^* > 0$. Untuk

$$0 < y_{E_0}^* < 1$$

$$y_{E_0}^* < 1$$

$$1 - y_{E_0}^* > 0$$

$$\Rightarrow x_s > 0$$

Karena $y_{E_0}^* > 0$ dan $y_{E_0}^* < 1$, kondisi ini membuktikan populasi $x_s > 0$. Dengan demikian terbukti bahwa persamaan (7) membuat ada dua titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$, jika $q > \frac{(o)^2}{4\eta_1}$, $\eta_1 < \delta$, dan $0 < y_{E_0}^* < 1$.

b) Kasus b

Akan ditunjukkan $q = \frac{(o)^2}{4\eta_1}$, $\eta_1 > \delta$ dan $0 < y_{E_0}^* < 1$, sehingga menghasilkan satu titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$. Untuk $q = \frac{(o)^2}{4\eta_1}$

$$\begin{aligned}
q &= \frac{(o)^2}{4\eta_1} \\
4\eta_1 q &= (o)^2 \\
(o)^2 - 4\eta_1 q &= 0 \\
\Rightarrow Dy_{E_0}^* &= 0
\end{aligned}$$

Karena $Dy_{E_0}^* = 0$, kondisi ini menyebabkan $y_1 = y_2 = y_{E_0}^*$. Untuk $\eta_1 > \delta$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &> \delta \\
\delta - \eta_1 &< 0 \\
-(\delta - \eta_1) &> 0 \\
\Rightarrow -(O) &> 0
\end{aligned}$$

Karena $q = \frac{(o)^2}{4\eta_1}$ dan $\eta_1 > \delta$, kondisi ini membuktikan $y_{E_0}^* > 0$. Untuk

$$0 < y_{E_0}^* < 1$$

$$\begin{aligned}
y_{E_0}^* &< 1 \\
1 - y_{E_0}^* &> 0 \\
\Rightarrow x_s &> 0
\end{aligned}$$

Karena $y_{E_0}^* > 0$ dan $y_{E_0}^* < 1$, kondisi ini membuktikan $x_s > 0$. Sehingga, terbukti persamaan (7) membuat ada satu titik kesetimbangan $E_0 \in \mathbb{R}_+^3$, jika $q = \frac{(o)^2}{4\eta_1}$, $\eta_1 < \delta$, dan $y_{E_0}^* < 1$. \square

Teorema 4.2

a) E_1 tidak terdapat di R_+^3 jika $Dy_{E_1}^* < 0$. Kondisi ini tidak menghasilkan titik interior.

b) $E_1 \in R_+^3$ jika $Dy_{E_1}^* > 0$ dan :

$$\begin{aligned}
i). \max \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} &< \eta_1 < \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^* - \eta_2 \beta}}{\alpha(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*, \text{ atau} \\
ii). \max \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^* - \eta_2 \beta}}{\alpha(1+\beta)} \right\} &< \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*, \text{ atau} \\
iii). \max \left\{ \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^* - \eta_2 \beta}}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} &< \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*, \text{ atau} \\
iv). \eta_1 &< \min \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^* - \eta_2 \beta}}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*, \text{ atau} \\
v). \max \left\{ \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^* - \eta_2 \beta}}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} &< \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*.
\end{aligned}$$

Kondisi ini menghasilkan dua titik kesetimbangan $E_1 \in R_+^3$.

c) $E_1 \in R_+^3$ jika $Dy_{E_1}^* = 0$ dan

$$i). \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)} < \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*, \text{ atau}$$

$$ii). \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*.$$

Kondisi ini menghasilkan satu titik kesetimbangan $E_1 \in R_+^3$.

Bukti

Eksistensi E_1 bergantung pada nilai $y_{E_1}^*$, dan selama diskriminan ($Dy_{E_1}^*$) dari $y_{E_1}^*$ tak negatif. Nilai $y_{E_1}^*$ diperoleh dari persamaan kuadrat yang disajikan pada persamaan (8)

$$(d_1 - d_2)y^2 + (d_3 - d_4)y - q\beta(1 + \beta) = 0 \quad (8)$$

dimana

$$\begin{aligned} d_1 &= \eta_1\mu(1 + \beta) \\ d_2 &= \eta_2(\mu + \beta) \\ d_3 &= \eta_1\alpha(1 + \beta) + \eta_2\beta \\ d_4 &= \eta_2\alpha + \delta\beta(1 + \beta) \end{aligned}$$

a) Kasus a

Akan ditunjukkan E_1 tidak terdapat di R_+^3 , jika $Dy_{E_1}^* < 0$.

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{-(d_3 - d_4) \pm \sqrt{Dy_{E_1}^*}}{2(d_1 - d_2)} \\ Dy_{E_1}^* &= (d_3 - d_4)^2 - 4(d_1 - d_2)q\beta(1 + \beta) \end{aligned}$$

$y_{1,2}$ merupakan akar-akar real dari persamaan (8) dan $Dy_{E_1}^*$ merupakan diskriminan dari persamaan (8), jika $Dy_{E_1}^* < 0$, maka $\sqrt{Dy_{E_1}^*}$ akan bernilai kompleks dan membuat $y_{E_1}^*$ bernilai kompleks, sehingga terbukti E_1 tidak terdapat di R_+^3 . \square

b) Kasus b

Karena $Dy_{E_1}^* > 0$, maka $y_1 = y_{E_1}^* \neq y_2 = y_{E_1}^*$. Sehingga, dapat dituliskan kembali $y_{E_1}^*$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-(d_3 - d_4) + \sqrt{Dy_{E_1}^*}}{2(d_1 - d_2)} \\ y_2 &= \frac{-(d_3 - d_4) - \sqrt{Dy_{E_1}^*}}{2(d_1 - d_2)} \\ Dy_{E_1}^* &= (d_3 - d_4)^2 - 4(d_1 - d_2)q\beta(1 + \beta) \end{aligned}$$

Akar-akar real dari persamaan (8) untuk kondisi ini akan bernilai positif jika memenuhi salah satu dari lima kasus berikut:

i). Kasus 1

$$\begin{aligned} \eta_1 &> \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1 + \beta)} \\ \eta_1\alpha(1 + \beta) &> d_4 - \eta_2\beta \\ \eta_1\alpha(1 + \beta) + \eta_2\beta - d_4 &> 0 \\ \Rightarrow d_3 - d_4 &> 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\eta_1 &< \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)} \\ \eta_1\alpha(1+\beta) &< d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta \\ \eta_1\alpha(1+\beta) + \eta_2\beta &< d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} \\ d_3 - d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} &< 0 \\ \Rightarrow -(d_3 - d_4) + \sqrt{Dy_{E_1}^*} &> 0\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\eta_1 &> \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \\ \eta_1\mu(1+\beta) &> d_2 \\ d_1 &> d_2 \\ d_1 - d_2 &> 0 \\ \Rightarrow 2(d_1 - d_2) &> 0\end{aligned}$$

sehingga irisan dari $\eta_1 > \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$, $\eta_1 < \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$, dan $\eta_1 > \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}$ adalah

$$\max\left\{\frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}\right\} < \eta_1 < \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$$

Kondisi ini membuktikan $y_{E_1}^* = y_1 > 0$, jika

$$\max\left\{\frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}\right\} < \eta_1 < \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$$

dan

$$\begin{aligned}\alpha &< \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* \\ \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* - \alpha &> 0 \\ \beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*) &> 0 \\ \frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{2(1+\beta)} &> 0 \\ \Rightarrow x_I &> 0\end{aligned}$$

Karena $y_{E_1}^* = y_1 > 0$ dan $x_I > 0$, terbukti titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, jika

$$\max\left\{\frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}\right\} < \eta_1 < \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)} \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*. \square$$

ii). Kasus 2

$$\begin{aligned}
\eta_1 &> \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)} \\
\eta_1 \alpha(1 + \beta) &> d_4 - \eta_2 \beta \\
\eta_1 \alpha(1 + \beta) + \eta_2 \beta - d_4 &> 0 \\
\Rightarrow d_3 - d_4 &> 0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\eta_1 &> \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)} \\
\eta_1 \alpha(1 + \beta) &> d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta \\
\eta_1 \alpha(1 + \beta) + \eta_2 \beta &> d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} \\
d_3 - d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} &> 0 \\
\Rightarrow -(d_3 - d_4) - \sqrt{Dy_{E_1}^*} &< 0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\eta_1 &< \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)} \\
\eta_1 \mu(1 + \beta) &< d_2 \\
d_1 &< d_2 \\
d_1 - d_2 &< 0 \\
\Rightarrow 2(d_1 - d_2) &< 0
\end{aligned}$$

sehingga irisan dari $\eta_1 > \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}$, $\eta_1 > \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}$, dan $\eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)}$ adalah

$$\max \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)}$$

Kondisi ini membuktikan $y_{E_1}^* = y_2 > 0$, jika

$$\max \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)}$$

dan

$$\begin{aligned}
\alpha &< \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* \\
\beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* - \alpha &> 0 \\
\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*) &> 0 \\
\frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{2(1 + \beta)} &> 0 \\
\Rightarrow x_I &> 0
\end{aligned}$$

Karena $y_{E_1}^* = y_2 > 0$ dan $x_I > 0$, terbukti titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, jika

$$\max \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*. \square$$

iii). Kasus 3

$$\begin{aligned} \eta_1 &< \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)} \\ \eta_1 \alpha(1+\beta) &< d_4 - \eta_2 \beta \\ \eta_1 \alpha(1+\beta) + \eta_2 \beta - d_4 &< 0 \\ \Rightarrow d_3 - d_4 &< 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \eta_1 &> \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)} \\ \eta_1 \alpha(1+\beta) &> d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta \\ \eta_1 \alpha(1+\beta) + \eta_2 \beta &> d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} \\ d_3 &> d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} \\ \Rightarrow d_3 - d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} &> 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \eta_1 &> \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \\ \eta_1 \mu(1+\beta) &> d_2 \\ d_1 &> d_2 \\ d_1 - d_2 &> 0 \\ \Rightarrow 2(d_1 - d_2) &> 0 \end{aligned}$$

sehingga irisan dari $\eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}$, $\eta_1 > \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}$, dan $\eta_1 > \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}$ adalah

$$\max \left\{ \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}$$

Kondisi ini membuktikan $y_{E_1}^* = y_1 > 0$, jika

$$\max \left\{ \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}$$

dan

$$\alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*$$

$$\begin{aligned}
& \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* - \alpha > 0 \\
& \beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*) > 0 \\
& \frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{2(1 + \beta)} > 0 \\
& \Rightarrow x_I > 0
\end{aligned}$$

Karena $y_{E_1}^* = y_1 > 0$ dan $x_I > 0$, terbukti titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, jika

$$\max \left\{ \frac{d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)} \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*. \square$$

iv). Kasus 4

$$\begin{aligned}
& \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1 + \beta)} \\
& \eta_1\alpha(1 + \beta) < d_4 - \eta_2\beta \\
& \eta_1\alpha(1 + \beta) + \eta_2\beta - d_4 < 0 \\
& \Rightarrow d_3 - d_4 < 0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
& \eta_1 < \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta}{\alpha(1 + \beta)} \\
& \eta_1\alpha(1 + \beta) < d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta \\
& \eta_1\alpha(1 + \beta) + \eta_2\beta < d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} \\
& d_3 < d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} \\
& \Rightarrow d_3 - d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} < 0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
& \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)} \\
& \eta_1\mu(1 + \beta) < d_2 \\
& d_1 < d_2 \\
& d_1 - d_2 < 0 \\
& \Rightarrow 2(d_1 - d_2) < 0
\end{aligned}$$

sehingga irisan dari $\eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$, $\eta_1 < \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$, dan $\eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}$ adalah

$$\eta_1 < \min \left\{ \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2\beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)} \right\}.$$

Kondisi ini membuktikan $y_{E_1}^* = y_2 > 0$, jika

$$\eta_1 < \min \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)} \right\}$$

dan

$$\begin{aligned} \alpha &< \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* \\ \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* - \alpha &> 0 \\ \beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*) &> 0 \\ \frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{2(1 + \beta)} &> 0 \\ \Rightarrow x_I &> 0 \end{aligned}$$

Karena $y_{E_1}^* = y_2 > 0$ dan $x_I > 0$, terbukti titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, jika

$$\eta_1 < \min \left\{ \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)}, \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)} \right\}, \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*. \square$$

v). Kasus 5

$$\begin{aligned} \eta_1 &< \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)} \\ \eta_1 \alpha(1 + \beta) &< d_4 - \eta_2 \beta \\ \eta_1 \alpha(1 + \beta) + \eta_2 \beta - d_4 &< 0 \\ \Rightarrow d_3 - d_4 &< 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \eta_1 &> \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)} \\ \eta_1 \alpha(1 + \beta) &> d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta \\ \eta_1 \alpha(1 + \beta) + \eta_2 \beta &> d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} \\ d_3 &> d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} \\ \Rightarrow d_3 - d_4 - \sqrt{Dy_{E_1}^*} &> 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \eta_1 &> \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)} \\ \eta_1 \mu(1 + \beta) &> d_2 \\ d_1 &> d_2 \\ d_1 - d_2 &> 0 \\ \Rightarrow 2(d_1 - d_2) &> 0 \end{aligned}$$

sehingga irisan dari $\eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}$, $\eta_1 > \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}$, dan $\eta_1 > \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}$ adalah

$$\max \left\{ \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}$$

Kondisi ini membuktikan $y_{E_1}^* = y_2 > 0$, jika

$$\max \left\{ \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}$$

dan

$$\begin{aligned} \alpha &< \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* \\ \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* - \alpha &> 0 \\ \beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*) &> 0 \\ \frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{2(1+\beta)} &> 0 \\ &\Rightarrow x_I > 0 \end{aligned}$$

Karena $y_{E_1}^* = y_1 > 0$ dan $x_I > 0$, terbukti titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, jika

$$\max \left\{ \frac{d_4 + \sqrt{Dy_{E_1}^*} - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)}, \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \right\} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)} \text{ dan } \alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*. \square$$

Dengan demikian, terbukti bahwa persamaan (8) membuat ada dua titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, jika $Dy_{E_1}^* > 0$ dan terpenuhi salah satu dari ke-lima kasus yang ada. \square

(a). Kasus c

Karena $Dy_{E_1}^* = 0$, maka $y_1 = y_2 = y_{E_1}^*$. Sehingga, dapat dituliskan kembali $y_{E_1}^*$ sebagai berikut

$$y_1 = y_2 = \frac{-(d_3 - d_4)}{2(d_1 - d_2)}$$

Akar-akar real dari persamaan (8) untuk kondisi ini akan bernilai positif jika memenuhi salah satu dari dua kasus berikut:

i). Kasus 1

$$\begin{aligned} \eta_1 &< \frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1+\beta)} \\ \eta_1 \alpha(1+\beta) &< d_4 - \eta_2 \beta \\ \eta_1 \alpha(1+\beta) + \eta_2 \beta - d_4 &< 0 \\ &\Rightarrow d_3 - d_4 < 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\eta_1 &> \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \\
\eta_1\mu(1+\beta) &> d_2 \\
d_1 &> d_2 \\
d_1 - d_2 &> 0 \\
\Rightarrow 2(d_1 - d_2) &> 0
\end{aligned}$$

sehingga irisan dari $\eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$ dan $\eta_1 > \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}$ adalah

$$\frac{d_2}{\mu(1+\beta)} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$$

Kondisi ini membuktikan $y_1 = y_2 = y_{E_1}^* > 0$, jika $\frac{d_2}{\mu(1+\beta)} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$, dan

$$\begin{aligned}
\alpha &< \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* \\
\beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* - \alpha &> 0 \\
\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*) &> 0 \\
\frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{2(1+\beta)} &> 0 \\
\Rightarrow x_I &> 0
\end{aligned}$$

Karena $y_1 = y_2 = y_{E_1}^* > 0$ dan $x_I > 0$. Terbukti titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, jika $\frac{d_2}{\mu(1+\beta)} < \eta_1 < \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$ dan $\alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*$.

ii). Kasus 2

$$\begin{aligned}
\eta_1 &> \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)} \\
\eta_1\alpha(1+\beta) &> d_4 - \eta_2\beta \\
\eta_1\alpha(1+\beta) + \eta_2\beta - d_4 &> 0 \\
\Rightarrow d_3 - d_4 &> 0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\eta_1 &< \frac{d_2}{\mu(1+\beta)} \\
\eta_1\mu(1+\beta) &< d_2 \\
d_1 &< d_2 \\
d_1 - d_2 &< 0 \\
\Rightarrow 2(d_1 - d_2) &< 0
\end{aligned}$$

sehingga irisan dari $\eta_1 > \frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)}$ dan $\eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}$ adalah

$$\frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)} < \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}$$

Kondisi ini membuktikan $y_1 = y_2 = y_{E_1}^* > 0$, jika $\frac{d_4 - \eta_2\beta}{\alpha(1+\beta)} < \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1+\beta)}$, dan

$$\alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*$$

$$\begin{aligned}
\beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^* - \alpha &> 0 \\
\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*) &> 0 \\
\frac{\beta - (\alpha + (\beta + \mu)y_{E_1}^*)}{2(1 + \beta)} &> 0 \\
\Rightarrow x_I &> 0
\end{aligned}$$

Karena $y_1 = y_2 = y_{E_1}^* > 0$ dan $x_I > 0$. Terbukti titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, jika $\frac{d_4 - \eta_2 \beta}{\alpha(1 + \beta)} < \eta_1 < \frac{d_2}{\mu(1 + \beta)}$ dan $\alpha < \beta - (\beta + \mu)y_{E_1}^*$.

Sehingga, terbukti persamaan (8) membuat ada satu titik kesetimbangan $E_1 \in \mathbb{R}_+^3$, jika $Dy_{E_1}^* = 0$ dan terpenuhi kasus 1 atau kasus 2. \square

Teorema 4.3 Titik kesetimbangan E_0 stabil atau stabil asimptotik lokal, jika $\beta < \frac{\alpha + \mu y_{E_0}^*}{1 - y_{E_0}^*}$, $k_0 > 0, g_1 > g_2$, dan $g_3 > g_4$. Sebaliknya, jika syarat stabil tidak terpenuhi maka titik kesetimbangan E_0 tidak stabil untuk semua syarat stabil tidak terpenuhi, atau tidak stabil saddle untuk salah satu syarat stabil tidak terpenuhi.

Bukti

Akan ditunjukkan $\lambda_1 < 0$ dan persamaan karakteristik $\lambda^2 + (p_1 - p_2)\lambda + (p_3 - p_4) = 0$ negatif atau memiliki bagian real negatif.

Untuk $\lambda_1 < 0$

$$\begin{aligned}
\beta &< \frac{\alpha + \mu y_{E_0}^*}{1 - \mu y_{E_0}^*} \\
\beta(1 - \mu y_{E_0}^*) &< \alpha + \mu y_{E_0}^* \\
\beta(1 - \mu y_{E_0}^*) - (\alpha + \mu y_{E_0}^*) &< 0 \\
\Rightarrow \lambda_1 &< 0
\end{aligned}$$

Dari matriks (4) diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + (p_1 - p_2)\lambda + (p_3 - p_4) = 0 \quad (9)$$

Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz persamaan karakteristik (9) menjadi

$$k_0 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_2 = 0 \quad (10)$$

dimana, $k_0 = 1, k_1 = (g_1 - g_2), k_2 = (g_3 - g_4)$.

Dengan demikian, matriks Hurwitz dari persamaan (10) berukuran 2×2 , yang dapat dituliskan

$$H_2 = \begin{bmatrix} k_1 & k_3 \\ k_0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan (10) memiliki akar-akar karakteristik real negatif atau memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

i). $k_0 > 0$

$$\begin{aligned}
1 &> 0 \\
\Rightarrow k_1 &> 0
\end{aligned}$$

$$\text{ii). } k_1 > 0$$

$$\begin{aligned} g_1 &> g_2 \\ g_1 - g_2 &> 0 \\ \Rightarrow k_1 &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{iii). } k_2 > 0$$

$$\begin{aligned} g_3 &> g_4 \\ g_3 - g_4 &> 0 \\ \Rightarrow k_2 &> 0 \end{aligned}$$

Karena $\lambda_1 < 0$ dan persamaan karakteristik (10) $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, dan $k_2 > 0$ yang menyebabkan persamaan karakteristik (9) memiliki akar-akar karakteristik real negatif atau memiliki bagian real negatif, maka titik kesetimbangan E_0 stabil atau stabil asimptotik lokal. Jika syarat stabil diatas tidak terpenuhi, maka titik kesetimbangan E_0 , tidak stabil untuk semua syarat tidak terpenuhi, atau tidak stabil *saddle* untuk salah satu syarat tidak terpenuhi. \square

Teorema 4.4 *Titik kesetimbangan E_1 stabil atau stabil asimptotik lokal, jika $k_0 > 0$, $p_1 > p_2$, $p_3 > p_4$, $p_5 > p_6$, dan $s_1 > s_2$, dimana*

$$\begin{aligned} s_1 &= p_1 p_3 + p_2 p_4 + p_6 \\ s_2 &= p_5 + p_1 p_4 + p_2 p_3 \end{aligned}$$

*Sebaliknya, jika syarat stabil tidak terpenuhi maka titik kesetimbangan E_1 tidak stabil untuk semua syarat stabil tidak terpenuhi, atau tidak stabil *saddle* untuk salah satu syarat stabil tidak terpenuhi.*

Bukti

Akan ditunjukan persamaan karakteristik (6) real negatif atau memiliki bagian real negatif. Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz persamaan (6) menjadi

$$k_0 \lambda^3 + k_1 \lambda^2 + k_2 \lambda + k_3 = 0 \quad (11)$$

dimana, $k_0 = 1$, $k_1 = (p_1 - p_2)$, $k_2 = (p_3 - p_4)$, dan $k_3 = (p_5 - p_6)$.

Dengan demikian matriks Hurwitz dari persamaan (11) berukuran 3×3 , yang dapat dituliskan

$$H_3 = \begin{bmatrix} k_1 & k_3 & k_5 \\ k_0 & k_2 & k_4 \\ 0 & k_1 & k_3 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz persamaan karakteristik (11) terdapat akar-akar karakteristik real negatif atau memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

$$\text{i). } k_0 > 0$$

$$\begin{aligned} 1 &> 0 \\ \Rightarrow k_1 &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{ii). } k_1 > 0$$

$$\begin{aligned} p_1 &> p_2 \\ p_1 - p_2 &> 0 \\ \Rightarrow k_1 &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{iii). } k_2 > 0$$

$$\begin{aligned} p_3 &> p_4 \\ p_3 - p_4 &> 0 \\ \Rightarrow k_2 &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{iv). } k_3 > 0$$

$$\begin{aligned} p_5 &> p_6 \\ p_5 - p_4 &> 0 \\ \Rightarrow k_3 &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{v). } k_1 k_2 - k_0 k_3 > 0$$

$$\begin{aligned} s_1 &> s_2 \\ p_1 p_3 + p_2 p_4 + p_6 &> p_5 + p_1 p_4 + p_2 p_3 \\ p_1 p_3 - p_1 p_4 + p_2 p_4 - p_2 p_3 + p_6 - p_5 &> 0 \\ (p_1 - p_2)(p_3 - p_4) - (p_5 - p_6) &> 0 \\ (p_1 - p_2)(p_3 - p_4) - 1 \cdot (p_5 - p_6) &> 0 \\ k_1 k_2 - k_0 k_3 &> 0 \end{aligned}$$

Karena persamaan karakteristik (11) $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$, dan $k_1 k_2 - k_0 k_3 > 0$, maka persamaan karakteristik (6) memiliki akar-akar karakteristik real negatif atau memiliki bagian real negatif. Sehingga, titik kesetimbangan E_1 stabil atau stabil asimptotik lokal. Jika syarat stabil diatas tidak terpenuhi, maka titik Kesetimbangan E_1 tidak stabil untuk semua syarat tidak terpenuhi, atau tidak stabil *saddle* untuk salah satu syarat stabil tidak terpenuhi. \square

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Berryman A. A., 1992. The Orgins and Evolution of Predator-Prey Theory, ESA Ecology Society of Amerika.
- [2] Holling C. S., 1959. Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism. The Canadian Entomologist , The Canadian Entomologist, Vol. XCI, No.7.
- [3] Anderson R. M., & May R. M., 1986. The Invasion, Persistence and Spread of Infectious Diseases within Animal and Plant Communities: Discussion, Philosophical Transactions of The Royal Society B Biological Sciences, Vol.314, No.1.
- [4] Chattopadhyay J., & Bairagi N., 2001. Pelicans at Risk in Salton Sea, Ecological Modelling-ECOL MODEL, Vol. 136.
- [5] Purnomo, A. S. Darti I., & Suryanto A., 2017. "Dynamics od Eco-Epidemiological Model with Harvesting". AIP Conference Proceedings.
- [6] Jha P.K., dan Ghorai S., 2017. "Stability of Prey-Predator Model with Holling Type Response Function and Selective Harvesting", Journal of Applied & Computational Mathematics, Vol. 06.
- [7] Edelstein-Keshet L., 2005. "Mathematical Models in Biology", SIAM, Canada.
- [8] Perko L., 2001. "Differential Equations and Dynamical System ", Springer, New York.